

Véges automaták Aufenkamp-Hohn-féle minimalizációs algoritmus

Minimalizálási feladat: egy tetszőleges véges (Ródeterminisztikus Rabin-Scott-féle felismerő) automatahoz megszerkeszteni a vele ekvivalens minimális állapotszámú automatát (azaz azt a minimális állapotszámú automatát, mely egy és ugyanazon nyelvet ismer fel mint az eredeti).

Egy H (nem üres) halmaz részhalmazainak valamely H_1, \dots, H_n rendszerét osztályozásnak hívjuk, ha teljesül rá a következő három feltétel:

- (a) H_1, \dots, H_n egyike sem üres halmaz.
- (b) H_1, \dots, H_n páronként diszjunktak, azaz tetszőleges $i, j \in \{1, \dots, n\}$ -re H_i -nek és H_j -nek csak akkor van közös eleme ha $i=j$.
- (c) H_1, \dots, H_n egyesítési halmaza H -val egyenlő, azaz $H = \bigcup_{i=1, \dots, n} H_i$

Tekintsük valamely (nem üres) H halmaz egy $C = \{H_1, \dots, H_n\}$ osztályozását. Vamely H -beli h elemet tartalmazó osztályt $C[h]$ -val jelöljük. Ha tehát egy H -beli h, h' elempár egy és ugyanazon C -beli osztályba esik, úgy $C[h] = C[h']$.

Tekintsük egy nem üres H halmaz két C, C' osztályozását. Akkor mondjuk, hogy a C' finomítása C -nek, ha tetszőleges H -beli h, h' párra $C'[h] = C'[h']$ -ből következik, hogy $C[h] = C[h']$.

Legyen most $M = (Q, \Sigma, q_0, Q_F, \delta)$ tetszőleges véges (determinisztikus, Rabin-Scott féle) automata. Akkor mondjuk, hogy a Q állapothalmaz $C = \{H_1, \dots, H_n\}$ osztályozása kompatibilis M -el, ha bármely q, q' állapotpárra $C[q] = C[q']$ esetén tetszőleges $x \in \Sigma^*$ -ra $C[\delta(q, x)] = C[\delta(q', x)]$.

Tekintsük Q -nak egy C_0, \dots, C_k, \dots osztályozás rendszerét a következőképp:

$$(1) C_0 = \{ Q \setminus Q_F, Q_F \}$$

minden $i \geq 0$ -ra és $q, q' \in Q$ -ra $C_{i+1}[q] = C_{i+1}[q']$, ha

$$(2) C_i[q] = C_i[q']$$

$$(3) \text{ minden } x \in \Sigma^* \text{-ra } C_i[\delta(q, x)] = C_i[\delta(q', x)].$$

Tekintettel arra, hogy Q véges halmaz, véges sok páronként különböző osztályozása van. Másrészt a C_0, \dots, C_k, \dots osztályozás fenti definíciója értelmében minden $i \geq 0$ -ra C_{i+1} finomítása

C_i -nek. Ezen két ok miatt lesz olyan $i \geq 0$, hogy $C_i = C_{i+1}$. A C_0, \dots, C_k, \dots osztályozás fenti definíciója értelmében ekkor teljes indukcióval adódik a következő két megállapítás.

1. Lemma. Ha valamely $i \geq 0$ -ra $C_i = C_{i+1}$, akkor tetszőleges $j \geq 0$ esetén $C_i = C_{i+j}$.

2. Lemma. Valamely $q, q' \in Q$ párra és $i \geq 0$ -ra $C_i[q] = C_i[q']$ akkor és csak akkor áll fenn, ha minden i -nél nem hosszabb w input szóra $\delta(q, w) \in Q_F$ akkor és csak akkor ha $\delta(q', w) \in Q_F$.

Ezen lemmák alapján kapjuk a következő tételt.

Tétel. Tekintsük valamely $M = (Q, \Sigma, q_0, Q_F, \delta)$ automata Q állapothalmazának egy olyan C_0, \dots, C_k, \dots osztályozás rendszerét, mely eleget tesz az (1), (2), (3) feltételeknek. Tegyük fel, hogy valamely $i \geq 0$ esetén $C_i = C_{i+1}$. Ekkor tetszőleges $q, q' \in Q$ esetén $C_i[q] = C_i[q']$ akkor és csak akkor áll fenn, ha minden w input szóra $\delta(q, w) \in Q_F$ akkor és csak akkor ha $\delta(q', w) \in Q_F$.

Bizonyítás: Ha w i -nél nem hosszabb, akkor a 2. lemma miatt igaz az állítás. Ha w az i -nél hosszabb, akkor az 1. lemma miatt $j \geq 0$ esetén $C_i = C_{i+j}$. Ekkor viszont a 2. lemma szerint az állítás igaz, ha w hossza $i+j$. Mivel j tetszőlegesen nagy lehet, a 2. lemma szerint minden w input szóra igaz lesz az állítás. Ezzel a tételt bizonyítottuk.

Aufenkamp-Hohn-féle minimalizációs algoritmus. Legyen $M = (Q, \Sigma, q_0, Q_F, \delta)$ tetszőleges véges (determinisztikus, Rabin-Scott féle) automata. Szerkesszünk meg hozzá a Q halmaznak az (1)-(3) feltételeknek megfelelő olyan C_0, \dots, C_i osztályozás rendszert, melyre

$$C_0 \neq C_1, \quad C_1 \neq C_2, \dots, C_{i-1} \neq C_i \text{ és } C_i = C_{i+1}.$$

Amennyiben minden egyes $\neq C_i$ osztály egy elemű, az M automata minimális. Ha nem, akkor a következőképp megkonstruált $M' = (C_i, \Sigma, C_i[q_0], Q'_F, \delta')$ automata lesz az M -el ekvivalens minimális automata.

Állapothalmaza a C_i osztályozás osztályai

kezdő állapota a C_i osztályozás azon osztálya, melynek a q_0 kezdő állapot eleme

végállapotai a C_i osztályozás azon osztályai, melynek elemei Q_F -beli (vég) állapotokból állnak

Tetszőleges C_i osztályozásbeli $C_i[q]$ osztály és $x \in \Sigma$ esetén $\delta'(C_i[q], x) = C_i[\delta(q, x)]$, ahol is q a $C_i[q]$ osztály egy tetszőleges eleme.